ELIPS: JURNAL PENDIDIKAN MATEMATIKA
Volume 4, Nomor 1, Maret 2023
ISSN: 2745-827X (Online)

MODEL PERSAMAAN BEDA PADA PENDAPATAN NASIONAL

Radhiah*, Ikhsan Maulidi, Nani Maulida, Intan Syahrini.
Jurusan Matematika, Universitas Syiah Kuala, Banda Aceh 23111, Indonesia
E-mail: radhiah@unsyiah.ac.id

ABSTRAK

Penerapan teori persamaan beda pada umumnya timbul dari kejadian yang terjadi pada kehidupan sehari-hari. Persamaan beda berkembang pesat dalam aneka macam bidang, seperti analisis numerik, teori kontrol, dan ilmu komputer. Dalam ilmu ekonomi persamaan beda dapat diaplikasikan pada permasalahan keuangan yaitu pada perhitungan pendapatan nasional. Perhitungan pendapatan nasional dapat memberikan gambaran terhadap tingkat perekonomian yang telah dicapai baik dalam hasil produksi, pembelanjaan, sumbangan dari berbagai sektor perekonomian serta tingkat kemakmuran. Penelitian ini menerapkan persamaan beda pada pendapatan nasional dalam perekonomian terbuka menggunakan metode akar karakteristik. Tujuan penelitian ini yaitu menentukan kondisi kestabilan dari titik keseimbangan model persamaan beda pada pendapatan nasional dan diberikan grafik simulasinya. Simulasi yang dilakukan pada penelitian ini dengan memilih beberapa nilai parameter berdasarkan teorema kondisi koefiesien. Model persamaan beda yang dihasilkan dalam penentuan pendapatan nasional pada perekonomian terbuka adalah persamaan beda orde dua dengan koefisien konstan. Berdasarkan hasil pemilhan nilai parameter yang sudah memenuhi kondisi kestabilan pada teorema kondisi koefisien menghasilkan grafik solusi pendapatan nasional stabil dan akan selalu konvergen sekitar keadaan titik kesetimbangan.

Kata Kunci: Persamaan Perbedaan, Pendapatan Nasional, Ekonomi Terbuka, Akar Kararakteristik.

ABSTRACT

The application of the difference equation theory generally arises from events that occur in everyday life. Difference equations are developing rapidly in various fields, such as numerical analysis, control theory, and computer science. In economics, the difference equation can be applied to financial problems, namely the calculation of national income. The calculation of national income can provide an overview of the level of the economy that has been achieved in terms of production, spending, contributions from various economic sectors and the level of prosperity. This study applies the difference equation to national income in an open economy using the characteristic root method. The purpose of this study is to determine the stability condition of the equilibrium point of the difference equation model on national income and given a simulation graph. The simulation carried out in this study by selecting several parameter values based on the coefficient condition theorem. The difference equation model produced in determining national income in an open economy is a second-order difference *equation with constant coefficients. Based on the results of selecting parameter values that meet the stability conditions in the coefficient condition theorem, the graph of the national income solution is stable and will always converge around the equilibrium point.*

Keywords: *Difference Equation*, *National Income*, *Open Economy*, *Characteristic Roots*.

A. PENDAHULUAN

Persamaan beda (difference equation) muncul sebagai gambaran dari fenomena perubahan yang teramati dengan variabel waktu diskrit. Penerapan teori persamaan beda berkembang pesat dalam aneka macam bidang, seperti analisis numerik, teori kontrol, dan ilmu komputer (Lakshmikantham dan Trigiante, 2017). Pada umumnya persamaan beda (difference equation) timbul dari kejadian yang terjadi pada kehidupan sehari-hari. Seperti contoh perubahan jumlah populasi kelinci di suatu pulau pada setiap waktu dengan jenis variabel diskrit waktu (Elaydi,2016)

Dalam ilmu ekonomi persamaan beda dapat diaplikasikan pada permasalahan keuangan, yaitu pada perhitungan pendapatan nasional. Perhitungan pendapatan nasional dapat memberikan gambaran terhadap tingkat perekonomian yang telah dicapai baik dalam hasil produksi, pembelanjaan, pada setiap waktu dengan jenis variabel diskrit waktu (Elaydi, 2016). berbagai sektor perekonomian serta tingkat kemakmuran. Menurut Elaydi (2016) di dalam bukunya telah membahas bentuk penerapan persamaan beda pada pendapatan nasional yang dipengaruhi oleh 3 faktor, yaitu pengeluaan konsumen, pengeluaran pemerintah, dan investasi. Dassious dan Devine (2016) juga telah merumuskan model baru perhitungan pendapatan nasional pada sistem waktu diskret ke dalam konteks multi negara, dimana setiap elemen berinterakti dengan yang lain sesuai pengalaman tahun lalu dan hubungan perdagangan negara. Penelitian ini menerapkan persamaan beda dalam perhitungan pendapatan nasional pada perekonomian terbuka yang dipengaruhi oleh pengeluaran konsumen, pengeluaran pemerintah, investasi, ekpor dan impor.

Flipping book berarti buku atau modul yang memiliki efek flip (memutar atau membalik), sehingga menimbulkan animasi seakan-akan membalik lembaran buku yang sebenarnya. Penggunaan flipping book sangat mudah, seperti halnya membaca buku digital lain yang sudah banyak digunakan seperti buku digital berformat pdf. Yang membedakan hanya cara membaca yang bisa dilakukan dengan cara membalik setiap pojok lembaran sebelum dan sesudahnya dengan bantuan mouse atau tombol tertentu. Flipping book yang akan dirancang ini menggunakan perangkat lunak Flip PDF Professional.

Perhitungan matematika sering kali didasarkan pada persamaan yang memungkinkan untuk menghitung nilai fungsi rekursif dari nilai yang diberikan. Persamaan seperti ini disebut "persamaan beda" atau "persamaan pengulangan" (Garnadi dan Khatizah, 2018).

Persamaan Beda Orde Pertama

Diberikan $p(t)$ dan $r(t)$ adalah fungsi dengan $p(t) \neq 0$ untuk setiap t, dapat didefinisikan sebagai:

$$y(t+1) - p(t)y(t) = r(t). \tag{1}$$

Persamaan (1) dikatakan persamaan beda orde pertama karena hanya terdapat y bernilai saat t dan $t+1$ pada $\Delta y(t) = y(t+1) - y(t)$ yang merupakan operator beda pertama, sehingga dapat ditulis $\Delta y(t) = r(t)$. Operator dasar yang sering digunakan dengan operator beda adalah operator geser. Operator geser E dapat ditulis, $Ey(t) = y(t+1)$.

Persamaan Beda Orde n

Persamaan beda orde n memiliki bentuk :

$$p_n(t)y(t+n) + p_{n-1}(t)y(t+n-1) + \cdots + p_0(t)y(t) = r(t), \tag{2}$$

dengan $p_0(t)$,...,$p_n(t)$ dan $r(t)$ adalah fungsi dari t dan $p_0(t) \neq 0$, $p_n(t) \neq 0$ untuk setiap t.

Persamaan (2) dapat dikatakan persamaan beda tak homogen dengan orde n. Jika $r(t) = 0$, maka disebut persamaan beda homogen. Apabila $p_0(t)$,...,$p_n(t)$ berupa konstanta maka persamaan (2) disebut juga persamaan tak homogen orde n dengan koefisien konstanta.

B. METODE

1. Metode Akar Persamaan Karakteristik

Menurut (Kelley, 2001) persamaan beda homogen dengan koefisien konstan dapat diselesaikan dengan menggunakan metode akar persamaan karakteristik. Untuk $p_n \neq 0$, maka dapat dibagi kedua ruas dari persamaan (2) dengan p_n dan akan membentuk persamaan

$$u(t+n) + p_{n-1}u(t+n-1) + \cdots + p_0 u(t) = 0, \tag{3}$$

dengan $p_0, \ldots, p_{n-1}$ konstanta dan $p_0 \neq 0$.

Akar Persamaan Karakteristik :

a. Polinomial $\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_0$ disebut polinomial karakteristik dari persamaan (3).
b. Persamaan $\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_0 = 0$ merupakan persamaan karakteristik dari persamaan (3).
c. Solusi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ dari persamaan karakteristik merupakan akar-akar karakteristik.
d. Solusi λ_k memiliki kelipatan a_k dengan $a_k \in \mathbb{N}$, jika terdapat faktor $(\lambda - \lambda_k)^{a_k}$ pada persamaan karakteristik dari persamaan (3) (Kelley, 2001).

2. Batasan Sifat Solusi

Pada bahasan ini semua bahasan merujuk pada (Elaydi, 2005). Dalam menyederhanakan solusi persamaan beda diperlukan batasan sifat solusi. Hal ini dikarenakan berkaitan dengan osilasi dan stabilitas dari suatu solusi. Osilasi merupakan siklus periodik dari fungsi tertentu (Maha dan Kiftiah, 2021).

Diberikan persamaan beda orde kedua

$$y(n+2) + p_1 y(n+1) + p_2 y(n) = 0, \tag{4}$$

Misalkan λ_1 dan λ_2 adalah akar karakteristik dari persamaan (4), maka ada tiga kasus berikut ini:

a. Jika λ_1 dan λ_2 adalah akar-akar real yang berbeda, maka $y_1(n) = {\lambda_1}^n$ dan $y_2(n) = {\lambda_2}^n$ adalah dua solusi yang bebas linier dari persamaan (4), mempunyai solusi umum

$$y(n) = a_1 {\lambda_1}^n + a_2 {\lambda_2}^n \tag{5}$$

b. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ merupakan akar kembar real. Solusi umum dari persamaan (4) yaitu

$$y(n) = (a_1 + a_2 n)\lambda^n \tag{6}$$

c. Akar kompleks $\lambda_1 = c + id$, dan $\lambda_2 = c - id$, di mana $d \neq 0$. Solusi dari (4) adalah

$$(n) = r^n[a_1 \cos(n\theta) + a_2 \sin(n\theta)] \tag{7}$$

Persamaan beda non homogen di mana nilainya konstan sebagai berikut.

$$y(n + 2) + p_1 y(n + 1) + p_2 y(n) = K, \tag{8}$$

di mana K adalah konstanta bukan nol. Persaman (8) memiliki titik kesetimbangan atau solusi $y(n) = Y^*$, sehingga

$$Y^* + p_1 Y^* + p_2 Y^* = K,$$

Atau

$$Y^* = \frac{K}{1 + p_1 + p_2}. \tag{9}$$

Akibatnya, bentuk solusi dari (8) yaitu

$$y(n) = Y^* + y_c(n). \tag{10}$$

$y_c(n)$ adalah solusi umum dari persamaan (8) yang homogen.

Kondisi Koefisien

Bentuk kondisi p_1 dan p_2 untuk titik kesetimbangan (solusi) persamaan (4) dan persamaan (8) stabil secara asimtotik (semua solusi konvergen ke Y^*) jika hanya jika

$i.\ 1 + p_1 + p_2 > 0$

$ii.\ 1 - p_1 + p_2 > 0$

$iii.\ 1 - p_2 > 0$

3. Pendapatan Nasional

Pendapatan nasional merupakan salah satu tolak ukur yang dapat digunakan untuk menilai kondisi perekonomian suatu negara. Perhitungan pendapatan nasional ini bertujuan untuk mendapatkan gambaran tentang tingkat ekonomi yang telah dicapai dan nilai *output* yang diproduksi, komposisi pembelanjaan agregat, sumbangan dari berbagai sektor perekonomian, serta tingkat kemakmuran yang dicapai. Indentitas keseimbangan pendapatan nasional pada perekonomian tertutup yang ditinjau dari segi pengeluaran adalah sebagai berikut.

$$Y = C + I + G$$

Berikut indentitas keseimbangan pendapatan nasional pada perekonomian terbuka yang ditinjau dari segi pengeluaran.

$$Y = C + I + G + (X - M)$$

Di mana, Y adalah pendapatan nasional, C adalah pengeluaran konsumsi, I adalah investasi, G adalah pengeluran pemerintah, X adalah ekspor dan M adalah impor (Dumairy, 2017d).

4. Model Persamaan Beda Pendapatan Nasional

Di negara kapitalis, pendapatan nasional $Y(n)$ pada perekonomian tertutup dalam periode tertentu n dapat ditulis sebagai :

$$Y(n) = C(n) + I(n) + G(n), \tag{11}$$

di mana

$C(n)$ = pengeluaran konsumen untuk pembelian barang konsumsi,

$I(n)$ = induksi investasi swasta untuk membeli peralatan modal,

$G(n)$ = pengeluaran pemerintah,

di mana n biasanya diukur dalam tahun.

Berikut ini beberapa asumsi yang diterima secara luas oleh para ekonom.

a. Pengeluaran konsumen $C(n)$ sebanding dengan pendapatan nasional $Y(n-1)$ pada tahun sebelumnya $n-1$, yaitu,

$$C(n) = \alpha Y(n-1), \tag{12}$$

di mana $\alpha > 0$ biasa disebut kecenderungan mengkonsumsi marjinal.

b. Investasi swasta terinduksi $I(n)$ sebanding dengan peningkatan konsumsi $C(n) - C(n-1)$, yaitu,

$$I(n) = \beta\, [C(n) - C(n-1)], \tag{13}$$

di mana $\beta > 0$ disebut perubahan konsumsi dengan tingkat investasi .

c. Pengeluaran pemerintah $G(n)$ konstan selama bertahun-tahun, sedemikian rupa sehingga

$$G(n) = 1. \tag{14}$$

Menggunakan persamaan (12), persamaan (13), dan persamaan (14) substitusikan dalam persamaan (11)

$$Y(n+2) - \alpha(1+\beta)Y(n+1) + \alpha\beta Y(n) = 1$$

menghasilkan persamaan beda orde kedua

$Y(n+2) - \alpha(1+\beta)Y(n+1) + \alpha\beta Y(n) = 1, \qquad n \in \mathbb{Z}^+.$

Keadaan setimbang dari pendapatan nasional adalah $Y^* = \frac{1}{(1-\alpha)}$ stabil asimtotik (stabil dalam teori ekonomi) jika dan hanya jika kondisi berlaku sebagaimana Teorema 1.

i. $\alpha < 1$

ii. $1 + \alpha + 2\alpha\beta > 0$

iii. $\alpha\beta < 1$

Pendapatan nasional $Y(n)$ berosilasi sekitar keadaan setimbang Y^* jika dan hanya jika

$$\alpha < \frac{4\beta}{(1+\beta)^2}.$$

Berikut contoh konkret di mana $\alpha = \frac{1}{2}$, β= 1, maka Y^* sama dengan dua kali pengeluaran pemerintah. Oleh karena itu pendapatan nasional $Y(n)$ selalu konvergen dalam mode osilasi ke $Y^* = 2$, terlepas dari kondisi awalnya pendapatan nasional $Y(0)$ dan $Y(1)$ (Lihat Gambar 1).

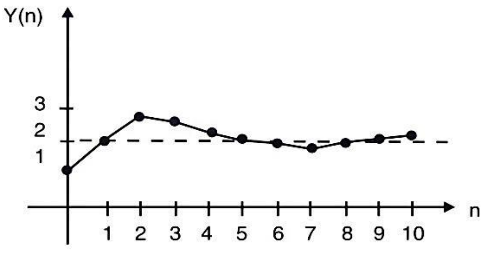
$$Y(n+2) - Y(n+1) + \frac{1}{2}Y(n) = 1$$

Solusi umum dapat diberikan :

$$Y(n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left[a_1 \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + a_2 \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right] + 2$$

Gambar 1 menggambarkan Solusi $Y(n)$ jika $Y(0) = 1$ dan $Y(1) = 2$, diperoleh $a_1 = -1$ dan $a_2 = 1$, solusi khususnya:

$$Y(n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right] + 2$$



Gambar 1. Solusi dari $Y(n+2) - Y(n+1) + \frac{1}{2}Y(n) = 1, Y(0) = 1, Y(1) = 2.$

C. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut persamaan pendapatan nasional pada perekonomian terbuka.

$$Y(n) = C(n) + I(n) + G(n) + X(n) - M(n), \quad (15)$$

dengan:

$Y(n)$ pendapatan nasional pada tahun ke n,

$C(n)$ pengeluaran konsumsi pada tahun ke n,

$I(n)$ Investasi pada tahun ke n,

$G(n)$ pengeluaran pemerintah pada tahun ke n,

$X(n)$ Ekspor pada tahun ke n,

$M(n)$ Impor pada tahun ke n,

Asumsi-asumsi yang digunakan adalah sebagai berikut :

Asumsi 1

Pengeluaran konsumen pada tahun ke n, $C(n)$ sebanding dengan pendapatan nasional $Y(n-1)$ pada tahun sebelumnya $n-1$, yaitu,

$$C(n) = \alpha Y(n-1), \quad (16)$$

di mana $\alpha > 0$ biasa disebut kecenderungan mengkonsumsi marjinal. Kecenderungan mengkonsumsi marjinal merupakan besarnya penambahan konsumsi untuk membeli barang atau jasa akibat peningkatan pendapatan.

Asumsi 2

Investasi pada tahun ke n, $I(n)$ sebanding dengan peningkatan konsumsi $C(n) - C(n-1)$, yaitu,

$$\begin{aligned} I(n) &= \beta\, [C(n) - C(n-1)] \\ &= \beta[\alpha Y(n-1) - \alpha Y(n-2)] \\ &= \alpha\beta[Y(n-1) - Y(n-2)], \quad (17) \end{aligned}$$

di mana $\beta > 0$ disebut perubahan konsumsi dengan tingkat investasi.

Asumsi 3

Pengeluaran pemerintah pada tahun ke n, $G(n)$ konstan selama bertahun-tahun, sedemikian rupa sehingga

$$G(n) = 1. \quad (18)$$

(Elaydi, 2005).

Asumsi 4

Impor negara pada tahun ke n bergantung pada pendapatan masa lalu dan pengganda γ

$$M(n) = \gamma\, Y(n-1) \quad (19)$$

Angka pengganda/*multiplier* m ialah angka yang menunjukan besaran perubahan pendapatan nasional $Y(n)$ akibat perubahan impor.

Asumsi 5

Impor juga merupakan linier dari ekspor ke negara lain pada tahun ke n

$$M(n) = \delta X(n)$$

$$X(n) = \frac{1}{\delta} M(n)$$

$$X(n) = \frac{1}{\delta} \gamma Y(n-1) \tag{20}$$

(Dassios dan Devine, 2016).

Dari persamaan (16) sampai dengan persamaan (20) disubstitusikan ke dalam persamaan (15), diperoleh

$$Y(n) - \left(\alpha + \alpha\beta + \frac{1}{\delta} \gamma - \gamma\right) Y(n-1) + (\alpha\beta)\, Y(n-2) = 1.$$

Persamaan pendapatan nasional dapat dibentuk persamaan beda orde dua sebagai berikut

$$Y(n+2) - \left(\alpha + \alpha\beta + \frac{1}{\delta}\gamma - \gamma\right) Y(n+1) + (\alpha\beta)\, Y(n) = 1, \quad n \in \mathbb{Z}^{+} \tag{21}$$

Berdasarkan persamaan (9) keadaan setimbang dari pendapatan nasional yaitu

$$Y^{*} = \frac{1}{1 - \alpha - \gamma(\frac{1}{\delta} - 1)} \tag{22}$$

Keadaan setimbang Y^{*} stabil asimtotik jika dan hanya jika kondisi parameter berlaku.

Berdasarkan persamaan (22) diperoleh keadaan setimbang pendapatan nasional $Y(n)$ sebagai berikut

$$Y^{*} = \frac{1}{2}$$

Substitusikan nilai parameter pada persamaan (21) Persamaan beda yang homogen

$$Y(n+2) + \frac{5}{6} Y(n+1) + \frac{1}{6}\, Y(n) = 0$$

Diperoleh akar-akar karakteristik $\lambda_1 = \frac{-1}{2}$ dan $\lambda_2 = \frac{-1}{3}$ Karena akar-akar karakteristik adalah bilangan real negatif berbeda, maka solusi umumnya

i. $\alpha + \frac{1}{\delta}\gamma - \gamma < 1$

ii. $1 + \alpha + 2\alpha\beta + \frac{1}{\delta}\gamma - \gamma > 0$

iii. $\alpha\beta < 1$ (23)

Untuk memperoleh solusi umum dan solusi khusus pendapatan nasional pada persamaan (21) maka dilakukan pemilihan nilai parameter. Pada penelitian ini dipilih parameter yang sudah memenuhi kondisi kestabilan pada pertidaksamaan (23). Simulasi dari solusi pendapatan nasional $Y(n)$ berupa grafik agar dilihat kekonvergen solusi. Selanjutnya diberikan grafik untuk melihat kondisi kestabilan dari titik kesetimbangan. Pilih masing-masing nilai parameter yang memenuhi persamaan (23).

1. Jika $\alpha = \frac{1}{6},\ \beta = 1,\ \delta = 2$ dan $\gamma = \frac{7}{3}$

   Berdasarkan persamaan (7) dan persamaan (10) maka solusi umumnya

$$Y(n) = \frac{1}{2} + a_1\left(\frac{-1}{2}\right)^n + a_2\left(\frac{-1}{3}\right)^n$$

   diasumsikan nilai awal pendapatan nasional adalah $Y(0) = 1,\ Y(1) = 2$. Sehingga solusi khusus persamaan beda pendapatan nasional adalah

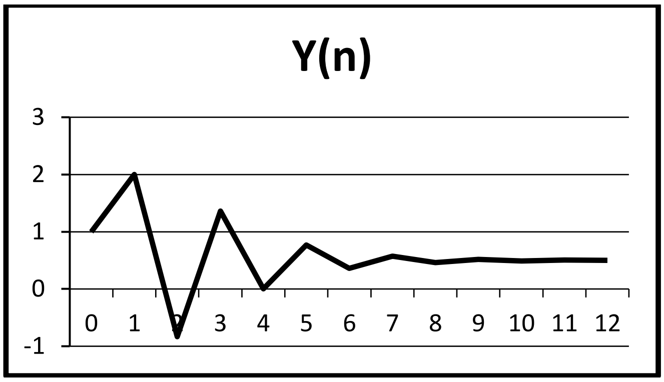
   $Y(n) = \frac{1}{2} - 10\left(\frac{-1}{2}\right)^n + \frac{21}{2}\left(\frac{-1}{3}\right)^n.$

   Tabel 1 berikut ini adalah nilai Y(n), untuk n=1, 2, 3, …, 12 dengan parameter yang ditentukan adalah $\alpha = \frac{1}{6},\ \beta = 1,\ \delta = 2$ dan $\gamma = \frac{7}{3}$

Tabel 1. *Solusi pendapatan ketika* $\alpha = \frac{1}{6},\ \beta = 1,\ \delta = 2$ *dan* $\gamma = \frac{7}{3}$

n	$Y(n)$	$C(n)$	$I(n)$	$G(n)$	$X(n)$	$M(n)$
0	1	−	−	−	−	−
1	2	−	−	−	−	−
2	−0,83333	0,333333	0,166667	1	2,333333	4,66667
3	1,36111	−0,13889	−0,47222	1	−0,97222	−1,9444
4	0,00463	0,226852	0,365741	1	1,587963	3,17593
5	0,76929	0,000772	−0,22608	1	0,005401	0,01080
6	0,35815	0,128215	0,127443	1	0,897505	1,79501
7	0,57332	0,059692	−0,06852	1	0,417846	0,83569
8	0,46254	0,095554	0,035862	1	0,668878	1,33776
9	0,51900	0,07709	−0,01846	1	0,539628	1,07926
10	0,49041	0,0865	0,00941	1	0,605497	1,21099
11	0,50482	0,081735	−0,00476	1	0,572148	1,14430
12	0,49758	0,084137	0,002402	1	0,588961	1,17792

   Berdasarkan pemilihan nilai parameter $\alpha = \frac{1}{6},\ \beta = 1,\ \delta = 2$ dan $\gamma = \frac{7}{3}$ yang memenuhi kondisi pada pertidaksamaan (23) menghasilkan akar karakteristik bilangan real negatif berbeda sehingga solusi pendapatan nasional $Y(n)$ stabil dan akan selalu konvergen pada titik kesetimbangan $Y^* = \frac{1}{2}$ seperti pada Gambar 2 berikut ini:



Gambar 2. *Solusi pendapatan ketika* $\alpha = \frac{1}{6},\ \beta = 1,\ \delta = 2\ \ dan\, \gamma = \frac{7}{3}$

2. Jika $\alpha = \frac{2}{3},\ \beta = \frac{1}{2},\ \delta = 1$ dan $\gamma = \frac{1}{2}$

   Dengan cara yang sama diperoleh solusi umum sebagai berikut:

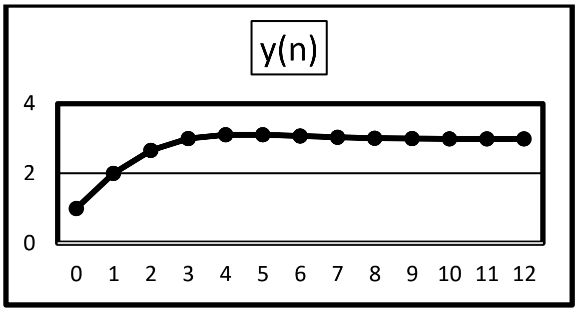
$$Y(n) = 3 + a_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \sin(\frac{\pi}{6}n) + a_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \cos(\frac{\pi}{6}n)$$

   diasumsikan nilai awal pendapatan nasional $Y(0) = 1,\ Y(1) = 2$. Sehingga solusi khusus persamaan beda pendapatan nasional adalah

$$Y(n) = 3 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \cos(\frac{\pi}{6}n)$$

Tabel 2 *Solusi pendapatan ketika* $\alpha = \frac{2}{3}\ ,\beta = \frac{1}{2},\ \delta = 1\ \ dan\, \gamma = \frac{1}{2}$

n	$Y(n)$	$C(n)$	$I(n)$	$G(n)$	$X(n)$	$M(n)$
0	1	–	–	–	–	–
1	2	–	–	–	–	–
2	2,66667	1,333333	0,333333	1	1	1
3	3	1,77778	0,222222	1	1,333334	1,33334
4	3,11111	2	0,111111	1	1,5	1,5
5	3,11111	2,074407	0,037037	1	1,555555	1,55555
6	3,07407	2,074407	0	1	1,555555	1,55555
7	3,03704	2,049383	−0,01235	1	1,537037	1,53704
8	3,01235	2,024691	−0,01235	1	1,518519	1,51852
9	3	2,008231	−0,00823	1	1,506173	1,50617
10	2,99589	2	−0,00412	1	1,5	1,5
11	2,99589	1,997257	−0,00137	1	1,497943	1,49794
12	2,99726	1,997257	0	1	1,497943	1,49794



***Gambar 3**. Solusi pendapatan ketika $\alpha = \frac{2}{3},\ \beta = \frac{1}{2},\ \delta = 1\ dan\ \gamma = \frac{1}{2}$*

Berdasarkan pemilihan nilai parameter $\alpha = \frac{2}{3},\ \beta = \frac{1}{2},\ \delta = 1$ dan $\gamma = \frac{1}{2}$ yang memenuhi kondisi pada pertidaksamaan (23) menghasilkan akar karakteristik bilangan komplek sehingga solusi pendapatan nasional $Y(n)$ stabil akan selalu konvergen dan berosilasi pada titik kesetimbangan $Y^* = 3$ seperti pada Gambar (3).

3. Jika $\alpha = \frac{1}{4},\ \beta = 3,\ \delta = 2$ dan $\gamma = 6$

Dengan cara yang sama diperoleh solusi umum sebagai berikut:

$$Y(n) = \frac{4}{15} + a_1\left(\frac{-1}{2}\right)^n + a_2\left(\frac{-3}{2}\right)^n$$

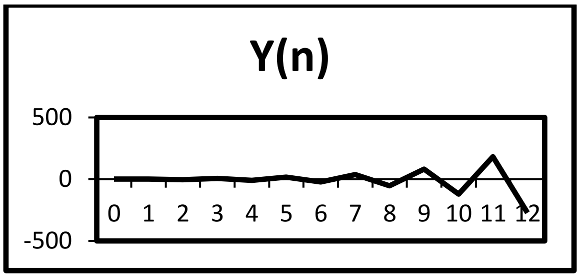
diasumsikan nilai awal pendapatan nasional sebagai berikut: $Y(0) = 1,\ Y(1) = 2$

Sehingga solusi khusus persamaan beda pendapatan nasional adalah

$$Y(n) = \frac{4}{15} + \frac{17}{6}\left(\frac{-1}{2}\right)^n - \frac{21}{10}\left(\frac{-3}{2}\right)^n$$

Tabel 3 Solusi pendapatan ketika $\alpha = \frac{1}{4},\ \beta = 3,\ \delta = 2\ dan\ \gamma = 6$

n	$Y(n)$	$C(n)$	$I(n)$	$G(n)$	$X(n)$	$M(n)$
0	1	–	–	–	–	–
1	2	–	–	–	–	–
2	−3,75	0,5	0,75	1	6	12
3	7	−0,9375	−4,3125	1	−11,25	−22,5
4	−10,188	1,75	8,0625	1	21	42
5	16,125	−2,54688	−12,8906	1	−30,5625	−61,125
6	−23,609	4,03125	19,73438	1	48,375	96,75
7	36,125	−5,90234	−29,8008	1	−70,8281	−141,656
8	−53,543	9,03125	44,80078	1	108,375	216,75
9	80,9922	−13,3857	−67,251	1	−160,629	−321,258
10	−120,827	20,24805	100,9014	1	242,9766	485,9531
11	181,910	−30,2068	−151,365	1	−362,481	−724,963
12	−272,2	45,47754	227,053	1	545,7305	1091,461



Gambar 4. Solusi pendapatan ketika $\alpha = \frac{1}{4},\ \beta = 3,\ \delta = 2\ \ dan\ \gamma = 6$

Berdasarkan pemilihan nilai parameter $\alpha = \frac{1}{4},\ \beta = 3,\ \delta = 2$ dan $\gamma = 6$ yang tidak memenuhi kondisi pada pertidaksamaan (23) akan memiliki solusi pendapatan nasional $Y(n)$ dari akar karakteristik bilangan real negatif berbeda tidak stabil dan menjauhi titik kesetimbangan $Y^* = \frac{4}{15}$ seperti pada Gambar 4.

D. PENUTUP

1. Kesimpulan

Berdasarkan bahasan di atas dapat disimpulkan bahwa model persamaan beda penentuan pendapatan nasional $Y(n)$ pada perekonomian terbuka merupakan persamaan beda orde dua dengan koefisien konstan. Bentuk persamaannya adalah:

$$Y(n+2) - \left(\alpha + \alpha\beta + \frac{1}{\delta}\gamma - \gamma\right) Y(n+1) + (\alpha\beta)\, Y(n) = 1, \qquad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Kondisi kestabilan titik kesetimbangan model persamaan beda pendapatan nasional pada perekonomian terbuka akan konvergen jika kondisi parameternya sebagai berikut

$$\alpha + \frac{1}{\delta}\gamma - \gamma < 1, \qquad 1 + \alpha + 2\alpha\beta + \frac{1}{\delta}\gamma - \gamma > 0, \qquad \alpha\beta < 1.$$

Apabila pemilihan nilai parameter $\alpha = \frac{1}{6},\ \beta = 1,\ \delta = 2, \gamma = \frac{7}{3}$ dan $\alpha = \frac{2}{3},\ \beta = \frac{1}{2},\ \delta = 1,\ \gamma = \frac{1}{2}$ terpenuhi kondisi parameter menghasilkan grafik $Y(n)$ akan selalu konvergen sekitar keadaan titik kesetimbangan Y^*, sedangkan $\alpha = \frac{1}{4},\ \beta = 3,\ \delta = 2,\ \gamma = 6$ tidak terpenuhi kondisi parameter menghasilkan grafik $Y(n)$ tidak stabil dan menjauhi titik kesetimbangan Y^*.

2. Saran

Penelitian selanjutnya dapat mengembangkan model dengan melibatkan peubah *wage* (upah), *rent* (sewa), *interest* (bunga), dan *profit* (laba).

DAFTAR PUSTAKA

Dassious, I. K., dan Devine, M. T., (2016). A Macroeconomic Mathematical Model for the National Income of Union of Countries with Interaction and Trade. *Economic Struktures*, 1-15.

Dumairy. (2017). *Perekonomian Indonesia* . Jakarta: Erlangga.

Elaydi, S. (2016). *An Introduction to Difference Equation.* USA: Springer Science Business Media, Inc.

Garnadi, A. D., dan Khatizah, E., (2018). Masalah Dirichlet untuk Persamaan Beda dalam Graf Terboboti. *Journal Of Mathematics And Its Applications*, 9(2), 31–40.

Kelley, W. G., dan Peterson, A. C., (2001). *Difference Equations.* San Diego: Academic Press.

Lakshmikantham, V. d. (2017). *Theory of Difference Equation: Numerical Methods and Applications.* USA: Marcel Dekker, Inc.

Maha, F., dan Kiftiah, M., (2021). Metode Gupta dalam Menentukan Solusi Partikular Persamaan. *Bimaster : Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, 10(4), 477–484.